

Kapitel 3 Bonus-Material

— Einleitung —

Wünschst du dir manchmal mehr Beispiele, Erläuterungen und Kommentare zu den bewusst kurz gehaltenen Beschreibungen der Lektionen? Dann bist du hier genau richtig! Diese Datei enthält Bonus-Material zu einigen Aktivitäten aus Kapitel 3.

Zu den Rätseln findest du viele Beispiele gelöster Aufgaben sowie zusätzliche Hinweise, wie du selbst welche erstellst. Das Programm Early Family Math beruht auf der Idee, dass frühe Mathematik etwas ist, das eine Familie gemeinsam tun sollte – und Rätsel für dein Kind zu bauen, die ihr zusammen löst, gehört wesentlich dazu. Sobald du bei einem Rätseltyp den Dreh raus hast, wirst du merken, dass sich die meisten, wenn nicht alle Rätsel ziemlich leicht selbst erstellen lassen.

Viele dieser Rätsel gibt es in verschiedenen Schwierigkeitsstufen, und auf den nächsten Seiten findest du zahlreiche Vorschläge und Beispiele, wie du diese Stufen gestaltest. Fang immer mit den einfachsten Rätseln an. Es ist weit besser, wenn dein Kind Erfolg, Verständnis und Freude bei etwas zu leichten Rätseln erlebt, als dass es an zu schweren Aufgaben frustriert, entmutigt und überfordert wird. Erst wenn dein Kind Selbstvertrauen und Begeisterung für eine mathematische Aktivität aufgebaut hat, ist der richtige Zeitpunkt, langsam größere Herausforderungen einzubauen. Außerdem macht nicht jedes Rätsel jedem Kind Spaß – dränge also keine Rätsel und Aktivitäten auf, die einfach nicht zünden.

Das findest du auf den folgenden Seiten:

- **Kapitel 3 – Formensummen**
- **Kapitel 3 – Nim mit doppelter Grenze**
- **Kapitel 3 – Gerade und ungerade zählen**
- **Kapitel 3 – Summengruppen**
- **Kapitel 3 – Zoo-Rettung**
- **Kapitel 3 – Häufige Summen**
- **Kapitel 3 – Sudoku-Varianten**
- **Kapitel 3 – Wie viele Möglichkeiten**
- **Kapitel 3 – Kartenstapel ordnen**
- **Kapitel 3 – Differenzpyramide**

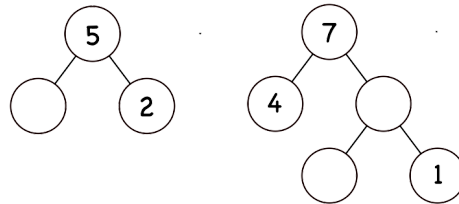
— Rechtliches —

Jede Familie sollte die Möglichkeit haben, gemeinsam Mathematik zu lernen und Freude daran zu haben. Deshalb ist Early Family Math eine Sammlung von Materialien, die Familien und Lehrkräfte frei bearbeiten, übersetzen, kopieren und weitergeben dürfen – ohne um Erlaubnis zu fragen, ausschließlich für nicht-kommerzielle Zwecke.

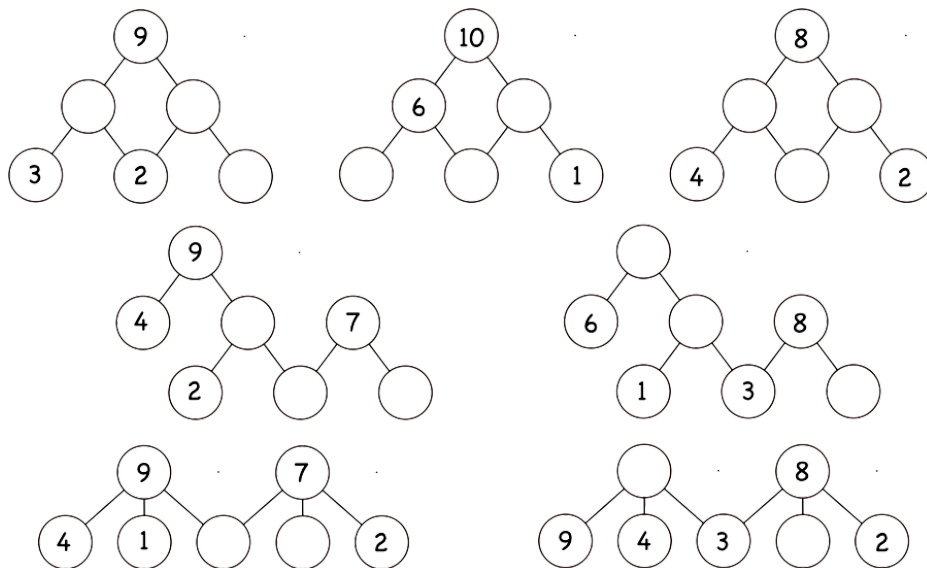
Kapitel 3 - Formensummen

Bei diesen Rätseln sind nummerierte Kreise nach oben hin verbunden, und jeder Kreis ist die Summe aller Kreise, die direkt darunter liegen und mit ihm verbunden sind.

Bei den einfachsten Rätseln sind die meisten Kreise schon ausgefüllt. Hier sind zwei Beispiele, die sich unkompliziert lösen lassen.



Schwerer werden diese Rätsel, wenn ein Kreis in mehr als eine Richtung genutzt wird. Alle der nächsten sieben Rätsel sind reine Rechenaufgaben, bis auf das rechte in der ersten Reihe. Es ist kniffliger, weil sich zwei unbekannte Kreise darüber denselben Kreis in der Mitte teilen. Die Zahlen sind dort klein genug, dass es sich mit ein wenig Ausprobieren gut lösen lässt.

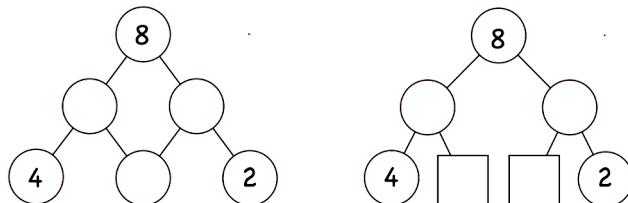


Noch mehr Tiefe bekommen diese Rätsel durch nicht-kreisförmige Formen. Während der Wert in einem Kreis mit dem Wert eines anderen Kreises oder einer anderen Form übereinstimmen kann, aber nicht muss, muss der Wert in einer nicht-kreisförmigen Form mit allen anderen Stellen derselben Form übereinstimmen. Alle Quadrate haben also denselben Wert. Nutzt gleiche Formen, um das Addieren von Zwillingen, Fast-Zwillingen und das Halbieren zu üben.

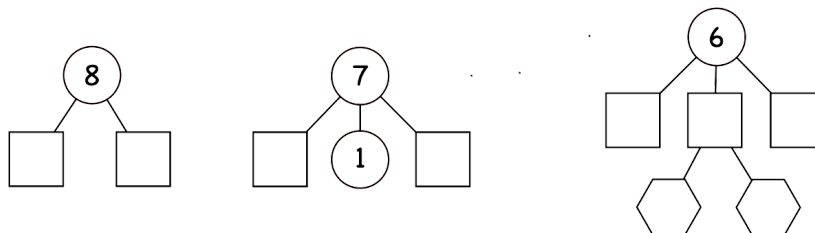
Wenn du magst, kannst du die Regel ergänzen, dass zwei nicht-kreisförmige Formen mit unterschiedlicher Gestalt auch unterschiedliche Werte haben müssen – ein Quadrat und ein Sechseck müssten sich dann also unterscheiden.

Jedes dieser Rätsel baust du, indem du von einer vollständig ausgefüllten Zeichnung ausgehst und dann einige Zahlen entfernst. Kommen im Rätsel Zahlen mehrfach vor, verwende für diese Zahl statt eines Kreises ein Quadrat oder eine andere Form.

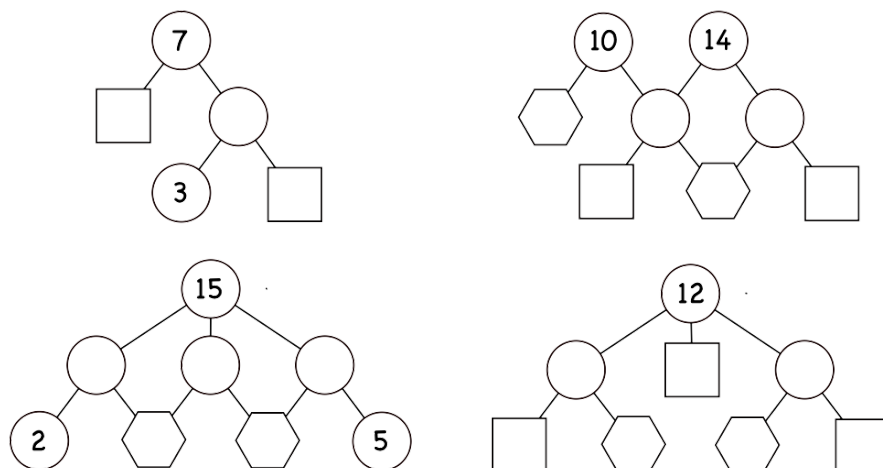
Die nächsten beiden Rätsel zeigen den psychologischen Unterschied zwischen einem Kreis, der aus zwei Richtungen genutzt wird, und dem Ersetzen dieses Kreises durch zwei Quadrate. Die beiden Rätsel sind im Kern dasselbe, aber ein kleines Kind wird das erste sehr viel leichter verstehen und bearbeiten können. Gib deinem Kind bitte reichlich Übung mit reinen Kreis-Rätseln, bevor ihr euch an die anspruchsvolleren Aufgaben mit anderen Formen wagt.



Rätsel wie die nächsten drei eignen sich gut, um das Addieren von Zwillingen, Fast-Zwillingen und Drillingen zu üben.



Hier sind ein paar Beispiele, wie sich mit nicht-kreisförmigen Formen kniffligere Rätsel bauen lassen. Wenn deinem Kind das Spaß macht, gibt es noch sehr viele weitere Abwandlungen zu erkunden. Viel Freude beim Rätseln!



Kapitel 3 - Nim mit doppelter Grenze

— Ein Haufen —

Legt einen Startwert fest, zum Beispiel 20. Dein Kind darf entscheiden, ob es anfängt oder als Zweites dran ist. Im ersten Zug entscheidet man sich, 1 oder 2 vom aktuellen Wert abzuziehen. Danach darf man jede Zahl von 1 bis zum Doppelten der zuletzt verwendeten Zahl abziehen. Wer zuerst 0 erreicht, gewinnt.

Von diesem Spiel gibt es viele Abwandlungen. Zum Beispiel:

- Wer die Zielzahl zuerst erreicht, verliert.
- Statt des Bereichs 1 bis 2 reicht der Anfangsbereich von 1 bis eins (oder zwei) weniger als die Zielzahl.
- Übt das Addieren statt des Subtrahierens: Ihr startet bei 0, und wer die Zielzahl zuerst erreicht, gewinnt (oder verliert).
- Die Anfangsgrenze ist eins (oder zwei) weniger als die Zielzahl, und statt das Doppelte des letzten Zuges zu erlauben, gilt der Wert des letzten Zuges selbst als Grenze.
- Die Anfangsgrenze ist eins (oder zwei) weniger als die Zielzahl, und statt des Doppelten gilt das Dreifache des letzten Zuges als Grenze.

Wie du siehst, gibt es jede Menge Varianten. Erfindet eure eigenen Familienregeln, wenn euch das Spiel Spaß macht.

Diese Spiele sind größtenteils deutlich schwerer zu durchschauen als die Nim-Versionen, bei denen pro Zug nur feste Möglichkeiten zur Wahl stehen.

— Mehr als ein Haufen —

Eine weitere Möglichkeit, neue Versionen dieses Spiels zu bauen, ist die Verwendung mehrerer Zahlen. Stell dir diese Version als mehrere Haufen von Spielsteinen vor (Kieselsteine, kleine Essensstücke). Du könntest zum Beispiel zwei Haufen haben, einen mit 12 und einen mit 8 Steinen. Eine übliche Regel lautet: Du darfst beliebig viele Steine nehmen, aber alle müssen aus demselben Haufen stammen.

Abwandlungen dieses Spiels sind:

- Es gibt mehr als zwei Haufen.
- Du darfst wahlweise aus allen Haufen dieselbe Anzahl Steine nehmen.
- Du darfst wahlweise aus den Haufen deiner Wahl dieselbe Anzahl Steine nehmen.
- Du darfst nur Steine vom größten Haufen nehmen.

Wie du dir denken kannst, gibt es noch viel mehr Versionen dieses Spiels – aber für den Moment ist das vermutlich mehr als genug!

Kapitel 3 - Gerade und ungerade zählen

— Grundaufbau —

Nehmt eine kleine Auswahl an Zahlenkarten mit kleinen Zahlen. Fangt mit drei Karten an und nehmt später mehr dazu, wenn deinem Kind die Untersuchungen Spaß macht.

Angenommen, die Zahlen sind 1, 2 und 3. Die Frage lautet: Wenn du zufällig zwei Karten ziehst und addierst – ist eine gerade oder eine ungerade Zahl wahrscheinlicher?

Das lässt sich auf zwei Wegen untersuchen. Der eine sind Versuche: Mischt die Karten, zieht zufällig zwei und schaut, ob die Summe gerade oder ungerade ist. Nach jedem Versuch macht ihr einen Strich in der passenden Spalte auf einem Blatt Papier, um die geraden und ungeraden Ergebnisse zu zählen.

Der zweite Weg besteht darin abzuzählen, auf wie viele Arten eine ungerade bzw. eine gerade Zahl entstehen kann. Bei 1, 2 und 3 gibt es zum Beispiel einen Weg zu einer geraden Zahl ($1 + 2$) und zwei Wege zu einer ungeraden Zahl ($1 + 3$, $2 + 3$). Bei den Zahlen 1, 2 und 3 sind ungerade Summen also doppelt so wahrscheinlich.

Wenn ihr eine Weile mit 1, 2 und 3 gespielt habt, probiert andere Dreiergruppen aus. Verhalten sich 2, 3 und 4 anders? Die Gruppen 1, 3, 5 und 2, 4, 6 ergeben nur gerade Zahlen – woran liegt das? Und wenn ihr eine Weile mit drei Karten gespielt habt, schaut, was mit 4 oder mehr Karten passiert.

Macht ein Spiel daraus: Eine Person ist Gerade, die andere Ungerade. Schaut, wer nach einem Dutzend Durchgängen die meisten Treffer hat.

— Untersuchungsanalyse —

Das Schöne an einer Untersuchung ist, dass sie dazu einlädt, mit den Zahlen zu spielen und selbst Mathematikerin oder Mathematiker zu sein. Spielt wie oben beschrieben mit verschiedenen Dreiergruppen herum. Nach einigem Ausprobieren bemerkt dein Kind vielleicht, dass sich jede Dreiergruppe mit mindestens einer geraden und einer ungeraden Zahl gleich verhält. Sind dagegen alle Zahlen ungerade oder alle gerade, sind alle Summen gerade. Womit sich die übliche Frage stellt: Warum ist das so?

Nach einigem Ausprobieren kann selbst ein kleines Kind über die wunderschöne zahlentheoretische Regel stolpern, die besagt:

- Gerade plus Gerade ist Gerade
- Gerade plus Ungerade ist Ungerade
- Ungerade plus Ungerade ist Gerade

Warum stimmt diese Regel? Stellt mit der Aktivität Zahlenformen gerade und ungerade Zahlen durch zwei Reihen von Spielsteinen dar – wann ergibt die Summe dieser Zahlen zwei gleich lange Reihen?

Ist diese Regel einmal entdeckt, erkennt dein Kind vielleicht, dass es auf die konkreten Zahlen gar nicht so ankommt. Die Zahlen 1, 2, 3 zu haben ist im Grunde dasselbe wie 3, 4, 5 (oder auch 3, 12, 17). Entscheidend ist allein, wie viele Zahlen gerade und wie viele ungerade sind.

Mit diesem Gedanken im Kopf folgt hier eine Tabelle der möglichen Ergebnisse für Gruppen aus drei und vier Zahlen.

3 Zahlen:

- 3 gerade, 0 ungerade – 3 gerade Summen
- 2 gerade, 1 ungerade – 1 gerade Summe, 2 ungerade Summen
- 1 gerade, 2 ungerade – 1 gerade Summe, 2 ungerade Summen
- 0 gerade, 3 ungerade – 3 gerade Summen

4 Zahlen:

- 4 gerade, 0 ungerade – 6 gerade Summen
- 3 gerade, 1 ungerade – 3 gerade Summen, 3 ungerade Summen
- 2 gerade, 2 ungerade – 2 gerade Summen, 4 ungerade Summen
- 1 gerade, 3 ungerade – 3 gerade Summen, 3 ungerade Summen
- 0 gerade, 4 ungerade – 6 gerade Summen

Die Ergebnisse sind überraschend und lassen für Interessierte noch viel zu erforschen übrig! Was passiert bei 5 Zahlen, bei 6 oder mehr? Warum scheint das Vertauschen von geraden und ungeraden Zahlen die Ergebnisse nicht zu verändern? Bei 3 geraden und 1 ungeraden Zahl kommt zum Beispiel dasselbe heraus wie bei 1 geraden und 3 ungeraden. Und warum sind bei einer Lage wie 3 gerade und 1 ungerade die Ergebnisse ausgeglichen, obwohl die Anzahlen von Gerade und Ungerade so unausgeglichen starten?

Das ist richtig coole Mathematik – und selbst ein kleines Kind kann damit herumspielen!

Kapitel 3 - Summengruppen

Diese Rätsel bestehen aus einem Zahlengitter und einer Zielsumme. Findet Gruppen aus zwei, drei oder vier Zahlen, die zusammen die Zielsumme ergeben. Die Mitglieder einer Gruppe müssen sich Seiten teilen. Verwendet Spielsteine, zum Beispiel verschiedene Lebensmittel, um jede Gruppe im Rätsel zu kennzeichnen. Am Ende besteht das gesamte Rätsel aus lauter gekennzeichneten Gruppen.

6	1	2	2
	5	3	4
	1	3	3

8	0	8	3	2
	2	4	4	3
	6	5	5	7
	1	2	3	1

Diese Rätsel sind eine besonders gute Übung für Zahlenzerlegungen. Wenn ihr Spielsteine statt eines Stifts verwendet, könnt ihr dieselben Rätselblätter immer wieder benutzen.

Solche Rätsel baust du, indem du von einem leeren Gitter ausgehst und darin Zahlen verteilst, und zwar in Paaren und Tripeln, die zusammen die Zielsumme ergeben. Es macht mehr Spaß, wenn das Rätsel nur eine Lösung hat, aber nimm das nicht zu genau.

6	1	2	2
	5	3	4
	1	3	3

6	1	6	2
	1	0	4
	4	1	5

6	1	2	3
	5	3	4
	1	3	2

6	4	2	1
	3	5	1
	3	1	4

6	1	0	1
	5	5	4
	3	3	2

6	5	1	4	2
	3	1	3	3
	2	2	3	1
	5	1	4	2

6	4	5	1	3
	2	1	3	3
	5	2	2	4
	1	3	1	2

6	1	5	2	4
	3	2	3	2
	1	1	2	4
	3	3	5	1

6	1	5	2	1
	3	2	1	5
	1	2	3	1
	2	4	3	3

7	2	4	3
	5	2	1
	6	1	4

7	2	6	1
	1	4	5
	4	3	2

7	7	1	3
	0	3	4
	1	6	3

7	5	1	1
	4	4	3
	3	7	0

7	4	4	3
	1	2	2
	6	1	5

7	5	2	1	1
	6	1	2	6
	3	4	3	1
	4	3	5	2

7	6	1	4	1
	4	5	2	3
	3	2	3	4
	1	6	3	1

7	4	5	2	1
	3	1	3	4
	2	3	4	2
	3	2	2	1

7	2	5	3	4
	1	5	4	3
	6	2	1	6
	6	1	2	5

8

5	1	7
1	2	3
6	2	5

6	2	4
3	1	4
5	3	4

4	4	1
4	2	7
2	3	5

7	1	0
1	2	8
5	3	5

1	0	4
4	8	4
3	6	2

8

0	8	3	2
2	4	4	3
6	5	5	7
1	2	3	1

2	3	5	3
6	4	3	2
2	4	3	5
4	2	1	7

2	3	2	1
3	2	5	2
1	6	1	3
7	4	4	2

7	1	2	3
2	1	6	5
3	5	1	3
5	4	4	4

9

1	0	9
4	6	5
4	3	4

5	6	3
4	5	7
3	1	2

1	2	7
3	5	4
0	9	5

4	1	8
2	3	3
5	4	6

7	4	5
2	6	2
1	8	1

9

5	4	3	6
7	4	2	3
2	5	3	6
8	1	1	3

5	5	4	5
2	4	2	7
2	6	3	6
1	8	1	2

5	2	2	1
3	5	2	6
3	1	3	4
3	7	2	5

2	3	6	3
7	5	3	3
2	2	7	2
5	4	1	8

10

8	2	3
5	3	4
5	7	3

6	5	5
1	3	6
2	8	4

7	5	4
3	1	9
4	6	1

4	2	1
4	5	3
4	1	6

1	9	7
4	3	3
3	4	6

10

1	5	3	2
4	3	7	4
5	3	5	6
3	4	1	4

8	9	1	3
1	1	3	4
6	3	5	5
4	7	1	9

4	1	5	5
5	3	2	1
6	5	7	2
4	1	6	3

1	6	8	2
3	1	3	6
3	1	6	5
7	9	4	5

Kapitel 3 - Zoo-Rettung

— Spielbeschreibung —

Für dieses Spiel braucht ihr zwei Würfel oder zwei Sätze Zahlenkarten von 1 bis 6. Jede Person hat 6 Spielsteine – Tierfiguren passen perfekt, falls ihr welche habt. Außerdem hat jede Person ein Blatt Papier mit Feldern, die von 0 bis 5 nummeriert sind. Jede Person entscheidet selbst, wo sie ihre 6 Steine platziert – mehrere Steine in einem Feld sind erlaubt.

Wer an der Reihe ist, erzeugt durch Würfeln oder Kartenziehen zwei Zahlen, und deren Differenz zählt. Wer in diesem Feld einen Stein hat, darf einen davon befreien. Wer zuerst alle eigenen Steine gerettet hat, gewinnt.

— Strategie beim Platzieren der Steine —

Wie sollte man die 6 Steine verteilen? Wie so oft lohnt es sich, mit einer einfacheren Frage zu beginnen: Wo wäre der beste Platz für einen einzigen Stein? Offensichtlich in dem Feld, das am wahrscheinlichsten vorkommt. Statt kniffliger Überlegungen können wir einfach alle Möglichkeiten auflisten und schauen, welche Differenzen am häufigsten auftreten.

1-1	0		2-1	1		3-1	2		4-1	3		5-1	4		6-1	5
1-2	1		2-2	0		3-2	1		4-2	2		5-2	3		6-2	4
1-3	2		2-3	1		3-3	0		4-3	1		5-3	2		6-3	3
1-4	3		2-4	2		3-4	1		4-4	0		5-4	1		6-4	2
1-5	4		2-5	3		3-5	2		4-5	1		5-5	0		6-5	1
1-6	5		2-6	4		3-6	3		4-6	2		5-6	1		6-6	0

Zählt man die Ergebnisse zusammen, erhält man: 0 – 6, 1 – 10, 2 – 8, 3 – 6, 4 – 4, 5 – 2. Die 1 ist also klar die beste Wahl und tritt in 10 von 36 Fällen auf. Nach Häufigkeit geordnet ergibt sich: 1, 2, 3, 0, 4 und 5.

Deutlich schwerer ist die Frage, was man mit mehr als einem Stein macht. Eine gute Frage für ein älteres Kind lautet: Warum legt man nicht einfach alle Steine auf die 1? Stell dir dazu die einfachere Lage vor, dass du nur zwei Steine hast und alle Ergebnisse außer 1 und 2 ignorierst. Dann käme die 1 in 10 von 18 Fällen vor und die 2 in 8 von 18. Legst du beide Steine auf die 1, brauchst du zum Gewinnen zweimal hintereinander eine 1. Legst du dagegen je einen Stein auf die 1 und die 2, gewinnst du mit 1 dann 2 oder mit 2 dann 1 – das ist rund 60 % wahrscheinlicher!

Statt einer langen Analyse belassen wir es bei etwas Einfachem, das unserer Intuition entspricht: Leg die meisten Steine auf die 1, die zweitmeisten auf die 2 und vielleicht einen auf die 0 oder die 3. Garantiert gewinnen wirst du damit nicht, aber auf Dauer fährst du gut!

Kapitel 3 - Häufige Summen

— Einführung in die Untersuchung —

Bereitet ein Blatt Papier mit 12 Zeilen vor. In jede Zeile kommen 8 Kästchen. In die Kästchen der linken Spalte schreibt ihr die Zahlen von 1 bis 12. Legt auf jede der 12 Zahlen einen Spielstein. Dann würfelt ihr mit zwei Würfeln. Nach jedem Wurf rückt der Stein, der zur Augensumme gehört, ein Kästchen nach rechts. Ziel jedes Steins ist es, als Erster ganz nach rechts über das Blatt zu gelangen.

Lass dein Kind selbst Fragen zum Untersuchen finden. Naheliegend sind zum Beispiel:

- Welcher Stein gewinnt und warum?
- Welche Steine schneiden gut ab und welche schlecht?
- Welcher Stein ist der schlechteste?
- Wie ändern sich die Sieger, wenn die Zeilen weniger oder mehr Kästchen bekommen?

Lass dein Kind seine Vermutungen zu diesen Fragen erklären und überprüft sie anschließend gemeinsam durch Versuche.

Baut einen Wettbewerb ein, indem ihr vor jeder Runde ratet, welcher Stein gewinnt.

— Analyse —

Wie schon beim vorigen Spiel ist es am einfachsten, alle Möglichkeiten aufzulisten.

1+1	2		2+1	3		3+1	4		4+1	5		5+1	6		6+1	7
1+2	3		2+2	4		3+2	5		4+2	6		5+2	7		6+2	8
1+3	4		2+3	5		3+3	6		4+3	7		5+3	8		6+3	9
1+4	5		2+4	6		3+4	7		4+4	8		5+4	9		6+4	10
1+5	6		2+5	7		3+5	8		4+5	9		5+5	10		6+5	11
1+6	7		2+6	8		3+6	9		4+6	10		5+6	11		6+6	12

Zusammengefasst ergeben sich diese Häufigkeiten: 1 – 0, 2 – 1, 3 – 2, 4 – 3, 5 – 4, 6 – 5, 7 – 6, 8 – 5, 9 – 4, 10 – 3, 11 – 2, 12 – 1. Übrigens lohnt es sich, diese Zahlen für jedes Würfelspiel im Kopf zu behalten, bei dem die beiden Würfel addiert werden!

Die 1 verliert also immer, und die 7 gewinnt am wahrscheinlichsten. Der Häufigkeitsunterschied zwischen 7 und 6 bzw. 8 ist allerdings nicht sehr groß. Bei nur wenigen Würfeln ließe sich kaum sicher vorhersagen, welche Zahl gewinnt. Erst bei sehr vielen Würfeln kann man sicher sein, dass sich am Ende die 7 durchsetzt.

Kapitel 3 - Sudoku-Varianten

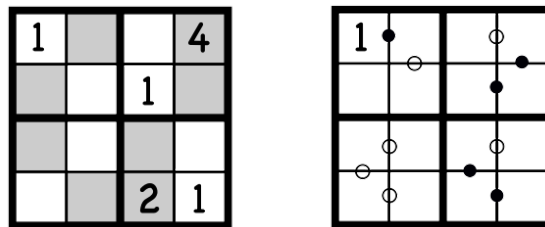
Es gibt unzählige Sudoku-Varianten auf der Welt, und noch mehr andere Rätsel, die diesen Varianten ähneln. In diesem Abschnitt schauen wir uns fünf dieser Sudoku-Varianten an. Alle folgen der Regel des „Lateinischen Quadrats“: Jede Zahl kommt in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal vor.

Jedes dieser Sudokus baust du, indem du von einem fertig ausgefüllten Rätsel des passenden Typs ausgehst – entweder einem Lateinischen Quadrat oder einem Puzzle-Sudoku. Alle Sudoku-Lösungen aus dem Bonus-Material zu den Kapiteln 1-2 kannst du dafür gut gebrauchen. Sobald du eine Lösung hast, ergänzt du die zusätzlichen Angaben, die diese besondere Rätselart braucht, und entfernst einige oder alle Zahlen.

— Puzzle-Sudokus mit Zusatzinformationen —

Diese beiden Rätselarten sind Lateinische Quadrate mit der zusätzlichen Bedingung, dass jede Zahl in jedem Teilbereich genau einmal vorkommt. Neben der Puzzle-Sudoku-Eigenschaft haben sie noch weitere Besonderheiten.

Gerade-Ungerade-Sudokus. Bei diesen Rätseln sind die geraden Zahlen grau hinterlegt. Diese Zusatzinformation macht solche Rätsel meist sehr leicht, und in der Regel lassen sich fast alle Zahlen entfernen.



Kropki-Sudokus. Diese entsprechen dem gewöhnlichen Sudoku, nur kommen zwei Sorten von Punkten zwischen den Feldern hinzu. Ist der Punkt hohl, unterscheiden sich die beiden Zahlen um eins. Ist der Punkt ausgefüllt, ist die eine Zahl halb so groß wie die andere. Wie bei den Gerade-Ungerade-Rätseln macht diese Zusatzinformation die Aufgaben meist recht leicht, sodass sich fast alle Zahlen entfernen lassen.

— Sudokus mit Addieren und Subtrahieren —

Diese Rätsel sind in Teilbereiche unterteilt, denen jeweils eine Zielzahl zugeordnet ist. Anders als beim Standard-Sudoku darf sich eine Zahl innerhalb eines Teilbereichs wiederholen, solange das Rätsel ein Lateinisches Quadrat bleibt. Besteht ein Teilbereich nur aus einem Feld, ist die Zielzahl der Wert dieses Feldes.

Bei einem Sumdoku-Sudoku ist die Summe aller Zahlen eines Teilbereichs die angegebene Zielzahl. Bei einem Diffdoku-Sudoku bestehen alle Teilbereiche aus einem oder zwei Feldern. Bei zwei Feldern ist die Differenz der beiden Zahlen die angegebene Zielzahl.

3+		3	7+
6+	4+		
		6+	4+
7+			

3-	1-	3	2-
		3-	
1-	1		2-
	2-		

Bei einem Sumdiffdoku-Sudoku werden Addition und Subtraktion kombiniert. Die Teilbereiche sind mit „+“ oder „-“ markiert, um anzuzeigen, ob die Summe oder die Differenz gemeint ist.

Diese drei Rätselarten werden üblicherweise ganz ohne vorgegebene Zahlen erstellt. Teilbereiche mit nur einem Feld sind natürlich im Grunde Felder mit eingetragener Zahl. Für ein kleines Kind gibst du besser einige Zahlen mehr vor, damit das Rätsel zu seinem Können passt.

Um die Rechenarten abwechslungsreicher zu machen, nimmt statt der üblichen 1 bis 4 bei einem 4-mal-4-Rätsel andere Zahlengruppen. Zum Beispiel die Zahlen 1, 3, 5 und 7. Wenn du das machst, schreib die Zahlen über das Rätsel, damit dein Kind weiß, womit es arbeiten soll.

Kapitel 3 - Wie viele Möglichkeiten?

Abzuzählen, auf wie viele Arten man Entscheidungen treffen kann, führt zu einigen spannenden Ergebnissen. Bei den meisten dieser Zählaufgaben hilft ein systematisches Vorgehen. Für ein Kind ist das schwierig – und das ist völlig in Ordnung. Lass es einfach herumprobieren und die Untersuchung genießen. Systematisch werden kann es später.

— Untersuchung 1 —

Wenn du nur mit Rot und Blau malst – auf wie viele Arten kannst du ein Monster mit Hut, Augen und Umhang zeichnen? Wie ändert sich das, wenn du nur Hut und Umhang färbst? Und wie, wenn du drei Farben nimmst oder jede Farbe nur einmal verwenden darfst?

Diese Untersuchung wirklich elegant durchzuführen erfordert Multiplikation, und dafür ist es noch zu früh. Dein Kind kann aber mit diesen Ideen herumspielen und ein Gefühl dafür entwickeln, wie solches Abzählen funktioniert.

Gehen wir die Fragen der Reihe nach durch. Der Hut kann rot oder blau sein, die Augen können rot oder blau sein, und der Umhang kann rot oder blau sein. Jedes weitere zu färbende Teil verdoppelt die Zahl der Möglichkeiten. 2 verdoppelt und dann noch einmal verdoppelt ergibt also 8 Möglichkeiten. Sie aufzulisten ist ein guter Weg, das zu sehen. Nehmen wir R für Rot und B für Blau und listen die Farben in der Reihenfolge Hut, Augen, Umhang auf. Die Möglichkeiten sind: RRR, RRB, RBR, RBB, BRR, BRB, BBR, BBB.

Färbt man nur Hut und Umhang, ergibt das 2 verdoppelt, also 4 Möglichkeiten. Die Liste dazu lautet: RR, RB, BR, BB.

Hättest du drei Farben für die drei zu färbenden Teile, wären es $3 \times 3 \times 3 = 27$ Möglichkeiten (eine lange Liste).

Ganz allgemein gilt: Wenn sich Ereignisse nicht gegenseitig beeinflussen, multipliziert man die Möglichkeiten. Darfst du jede Farbe nur einmal verwenden, schränken sich die Ereignisse gegenseitig ein und beeinflussen einander sehr wohl. Listen wir sie auf und nehmen G (für Grün) als dritte Farbe: RBG, RGB, BGR, BRG, GRB, GBR.

— Untersuchung 2 —

Du hast eine Reihe aus 5 gleichen Bonbons. Auf wie viele Arten kannst du sie so färben, dass 2 rot und 3 blau sind?

Beschriftet 2 Zettel mit R und 3 Zettel mit B. Dein Kind kann mit den zehn Möglichkeiten spielen, diese auszulegen. Die Liste lautet: RRBBB, RBRBB, RBBRB, RBBBR, BRRBB, BRBRB, BRBBR, BBRRB, BBRBR, BBBRR. Man kann es so betrachten: Sobald du die 2 Plätze für Rot festgelegt hast, bleibt Blau keine Wahl mehr und muss auf die anderen 3 Plätze. Interessanterweise geht es genauso andersherum, indem man zuerst die 3 blauen Zettel legt.

Wenn ihr Spaß daran habt, wandelt die Untersuchung ab, indem ihr die drei Zahlen ändert – achtet nur darauf, dass die beiden kleineren Zahlen zusammen die Gesamtzahl der Bonbons ergeben.

— Untersuchung 3 —

Findet alle Möglichkeiten, eine Summe durch Addieren der Zahlen 1 und 2 zu erreichen. Macht das einmal mit und einmal ohne Beachtung der Reihenfolge.

Ohne Beachtung der Reihenfolge. Schauen wir uns das Beispiel Summe 4 an. Die Möglichkeiten sind $1+1+1+1$, $2+1+1$ und $2+2$. Es gibt also 3 Wege. Nach ein paar weiteren Beispielen merkst du, dass du eigentlich zählst, auf wie viele Arten man mit Zweien auf Summen bis höchstens 4 kommt. Du kannst 0 bis 2 Zweien verwenden, also gibt es 3 Wege. Ganz allgemein ist die Antwort bei geraden Zahlen eins mehr als die Hälfte der Zahl und bei ungeraden Zahlen eins mehr als die Hälfte der um eins verringerten Zahl.

Mit Beachtung der Reihenfolge. Beim Beispiel 4 sind die Möglichkeiten $1+1+1+1$, $2+1+1$, $1+2+1$, $1+1+2$ und $2+2$. Es gibt also 5 Wege. Probiert viele Beispiele durch und macht eine Tabelle der Ergebnisse. So sollte sie aussehen (gut, bis 10 seid ihr wahrscheinlich nicht gekommen):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Beim Betrachten dieser Zahlen fällt deinem Kind vielleicht auf, dass je zwei Zahlen zusammen die nächste Zahl ergeben. Warum ist das so? Diese Zahlen heißen Fibonacci-Zahlen, und sie tauchen erstaunlich oft auf.

Um zu verstehen, warum diese Zahlen hier auftreten, schau dir das Beispiel 4 an und achte auf die letzte Zahl der Summe. Diese letzte Zahl ist entweder 1 oder 2. Ist sie 1, dann ergeben die vorhergehenden Zahlen alle Wege, auf 3 zu kommen. Ist die letzte Zahl 2, dann ergeben die vorhergehenden Zahlen alle Wege, auf 2 zu kommen. Die Anzahl der Wege zur 4 ist also die Summe aus den Wegen zur 3 und den Wegen zur 2.

Größere Zahlen. Wenn euch das Spaß macht, könnt ihr auch untersuchen, auf wie viele Arten sich Summen mit den Zahlen von 1 bis 3 oder sogar 1 bis 4 bilden lassen. Muster zu finden ist dort deutlich schwerer, aber mit den Zahlen zu spielen macht genauso viel Freude.

Kapitel 3 - Kartenstapel ordnen

— Einleitung —

Die Herausforderung besteht darin, einen Stapel nummerierter Karten, sagen wir 1 bis 5, so zu schichten, dass Folgendes gilt:

Die oberste Karte ist die 1. Leg diese oberste Karte beiseite. Die nächste Karte schiebst du unter den Stapel. Die darauffolgende Karte ist die 2 und wird beiseitegelegt. Die nächste Karte schiebst du wieder unter den Stapel. Mach so weiter, bis alle Karten der Reihe nach beiseiteliegen.

Sobald deinem Kind das für 1 bis 5 leichtfällt, fordere es mit größeren Zahlenbereichen heraus.

— Systematisch vorgehen —

Das Schwierige an diesem Rätsel ist das systematische Vorgehen. Für jede Stapelgröße kannst du herumprobieren und irgendwann auf die Antwort kommen. Suchen wir nach interessanten Mustern, die es leichter machen.

Angenommen, du legst die Karten der Reihe nach auf den Tisch. Hier sind die Lösungen für die ersten Fälle. Die Zahlen hinter dem Pfeil geben die Reihenfolge der übrigen Karten nach dem ersten Durchgang an.

1

1 2 -> 2

1 3 2 -> 3

1 3 2 4 -> 3 4

1 5 2 4 3 -> 5 4

1 4 2 6 3 5 -> 4 6 5

1 6 2 5 3 7 4 -> 6 5 7

Bei einer geraden Anzahl Karten (sagen wir 6) stehen auf den ungeraden Positionen der Reihe nach die Karten der ersten Hälfte (hier also 3 Stück), und die übrigen Plätze werden mit der Lösung für die halbe Kartenzahl gefüllt, nur mit erhöhten Werten. Im Beispiel mit 6 stehen auf den ungeraden Plätzen 1, 2, 3 und auf den geraden Plätzen 4, 6, 5 – das sind die Werte 1, 3, 2 (die Lösung für einen Stapel mit drei Karten), jeweils um 3 erhöht.

Bei einer ungeraden Anzahl Karten ist das Muster etwas kniffliger. Wie zuvor stehen auf den ungeraden Plätzen ungefähr die erste Hälfte der Zahlen (bei 7 also 1 bis 4). In den Beispielen wird die erste Karte hinter dem Pfeil ans Ende geschoben – es sollte also die Karte sein, die in dieser Folge zuletzt kommen soll. Danach geht es weiter wie im geraden Fall.

Kapitel 3 - Differenzpyramide

— Einleitung —

Die Herausforderung besteht darin, die Zahlen von 1 bis 6 in einer Pyramide anzuordnen – eine Karte in der obersten Reihe, zwei in der zweiten und drei in der dritten –, wobei jede Zahl die Differenz der beiden Zahlen darunter ist.

Falls es hakt, helfen zwei Tipps. Die 6 muss in der untersten Reihe stehen, denn sie kann nicht die Differenz irgendeines Zahlenpaares sein. Ebenso muss die 5 entweder in der untersten Reihe stehen oder in der mittleren Reihe über der 6 und der 1.

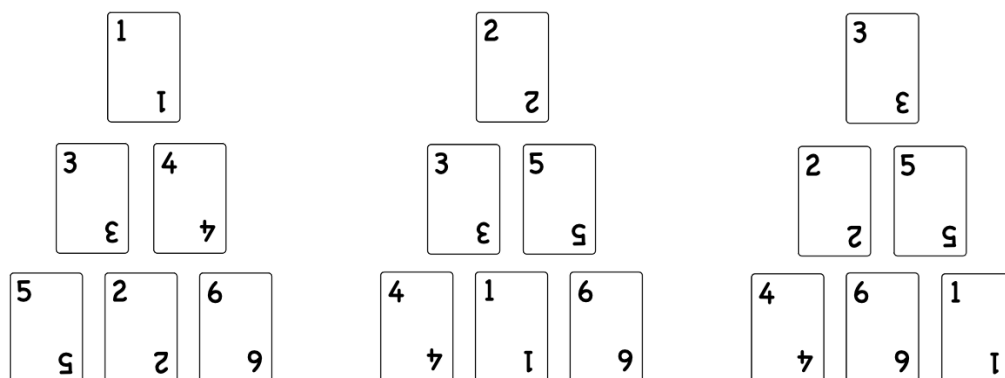
— Was sind „verschiedene“ Lösungen? —

Wenn deinem Kind dieses Rätsel leichtfällt, fordere es heraus, alle Lösungswege zu finden. Sprecht darüber, was es heißt, dass zwei Lösungen verschieden sind – sollte eine Lösung, die das Spiegelbild einer anderen ist, als verschieden gelten?

Es lohnt sich, gleich zu Beginn zu klären, was Lösungen verschieden macht. Weil sich das Spiegelbild jeder Lösung leicht herstellen lässt und selbst wieder eine Lösung ist, ist es sinnvoll, diese nicht mitzuzählen. Spiegelbilder wegzulassen halbiert die Zahl der zu betrachtenden Lösungen.

So dürfen wir zum Beispiel annehmen, dass die 6 nicht nur in der untersten Reihe steht, sondern dort auch in der Mitte oder rechts. Denkt man das mit der 5 weiter, bleiben für die unterste Reihe nur vier mögliche Anordnungen: 5 a 6, b 5 6, c 1 6 oder d 6 1.

Ab hier ist es eine Frage des Durchprobierens der verschiedenen Werte für a, b, c und d. Nach einigem Ausprobieren stellst du fest: a ist 2, b funktioniert nie, c muss 4 sein und d muss 4 sein. Ohne Spiegelbilder gibt es also genau drei Lösungen:



— Größere Pyramiden —

Bauen wir mit den Karten von 1 bis 10 eine Pyramide mit vier Reihen. Das ist deutlich verwickelter. Ein paar Karten lassen sich schnell setzen, danach braucht es einiges an Ausdauer. Weil 10 nicht die Differenz zweier Karten sein kann, muss sie in die unterste Reihe. Ebenso steht die 9 entweder in der untersten Reihe oder in der vorletzten Reihe über der 1 und der 10. Auch die Karten 8 und 7 eignen sich gut, um Möglichkeiten auszuschließen.

Damit sieht die unterste Reihe wie eine der folgenden aus (Spiegelbilder weggelassen):

a b 9 10, c 9 d 10, 9 e f 10, g h 10 9, i 9 10 j, 9 k 10 L, m n 1 10, o 1 10 p, q r 10 1

Das sind eine Menge Möglichkeiten!

Zum Glück schrumpft die Liste auf Folgendes zusammen, wenn man überlegt, wo die 8 und die 7 stehen können (sofern sich kein Fehler eingeschlichen hat!). Sobald du die unterste Reihe hast, ist der Rest jeweils leicht zu vervollständigen.

8 3 10 9, 6 1 10 8, 8 1 10 6

Pyramiden der Größe 15, 21 oder größer überlassen wir den wirklich Hartnäckigen. Viel Erfolg und viel Spaß!